

2012 年臺灣國際科學展覽會 優勝作品專輯

編號：010012

作品名稱

三角形同向切割線之性質推廣

得獎獎項

大會獎：四等獎

作者姓名：何宜鴻、朱家辰

就讀學校：新竹市立光華國民中學

指導教師：蕭慶利

關鍵字：同向切割線、線段比例

作者簡介



我的名字叫何宜鴻，目前就讀於新竹市立光華國中三年級，對於科展，國小雖已有了些許經驗，但是報名數學科，這還是第一次，因此讓我格外興奮。

從小，我就對數學方面有特別興趣，也在數學課業上，有比較好的表現。我喜歡享受解題的樂趣，尤其是戰勝一道又一道的難題時，那專屬於自己的成就感，不是用言語可以表達的喜悅。

這一次的科展，對我來說是一個很棒的體驗，從中，我學到了許多研究的方式與技巧，也從點線面中體會了幾何的奧妙活力。特別要感謝我的父母、老師、學校給予了我這一次的機會和他們的辛勤指導、支持與鼓勵，因為他們，我才能度過一次又一次的困難與危機。对大家來說，這可能只是茫茫報告海中一片不起眼的碎片，對我而言，卻是最珍貴的一份屬於我的寶物。



我是朱家辰，我目前就讀光華國中三年級，我的興趣是聽音樂、玩益智遊戲、看電視、玩電腦、睡覺等等，但我最喜歡做的事還是算數學，而且越難的題目我越喜歡，因為解完題目得到答案時會有非常滿足的成就感，而且這也是一個不容易讓自己睡著，同時還可以消磨不知道要如何使用的時間，平常有時間的時候我還會去參加一些數學競賽，用來測試自己的實力到底有沒有進步，但現在因為要面臨基測不得不減少算數學的時間，但我還是會盡力把零碎的時間拼湊成一段方便利用的時間，以增加生活的樂趣。

摘要

William Johnston 和 **Joe Kennedy** 首先以切割重組的方式提出了任意三角形的面積為第 $\langle 3,1 \rangle$ 組同向切割線所得到中央三角形面積的 7 倍(即 $\frac{A_3}{A_{3\langle 3,1 \rangle}} = 7$)。

本研究將此方法性質加以推廣，我們證明了任意三角形其 $\frac{A_3}{A_{3\langle n,m \rangle}} = \frac{n^2 - mn + m^2}{(n - 2m)^2}$ ，

而在推廣至任意四邊形時，由於公式十分龐大複雜，無法化簡，因此我們退而求其次，證明了任意梯形第 $\langle n,1 \rangle$ 組與第 $\langle n,m \rangle$ 組同向切割線所切割出的面積與線段比例特性。最後，我們也分析探討任意梯形當 $b = d$ 時(即平行四邊形)以及任意正 r 邊形其第 $\langle n,m \rangle$ 組同向切割線之性質。

Abstract

William Johnston and Joe Kenndy cut and combined a triangle to illustrate that the area of a triangle is 7 times of the little triangle, which the

same-direction-tangent-line $\langle 3,1 \rangle$ cut($\frac{A_3}{A_{3\langle 3,1 \rangle}}=7$). In this report, we popularize this

property. We proved arbitrary triangle $\frac{A_3}{A_{3\langle n,m \rangle}} = \frac{n^2 - 2m + m^2}{(n - 2m)^2}$, yet, when we

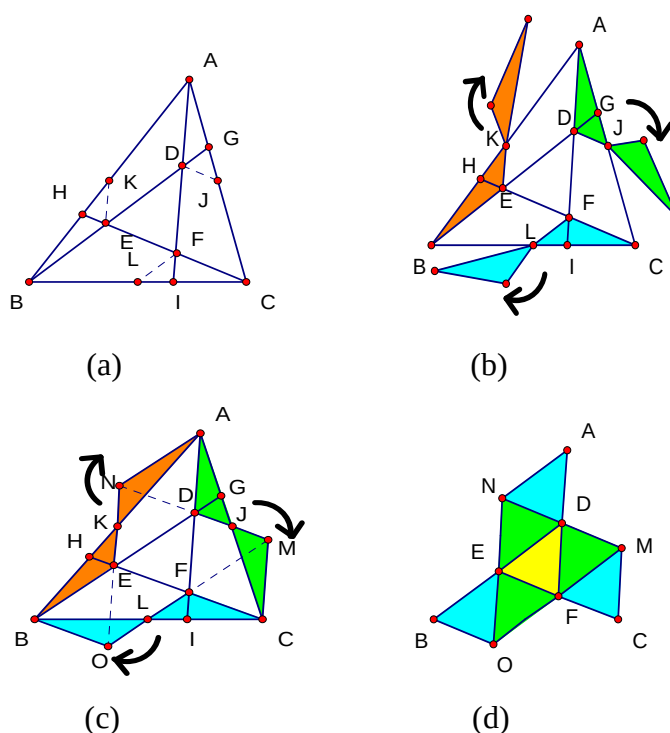
popularized to arbitrary quadrilateral, the formula of it is very long and complicated, it can't be simplified. Because of that, we returned and asked the second ones, we

proved trapezoid $\frac{A_4}{A_{4\langle n,1 \rangle}} \cdot \frac{A_4}{A_{4\langle n,m \rangle}}$ and computed the ratio of line segment. Finally, we

analyze parallelogram's and regular polygon's property.

壹、研究動機

著名的數學雜誌期刊 *Proof Without Words II* 中, William Johnston 和 Joe Kennedy 在 "Heptasection of a triangle" 本篇文章中, 首先提出了關於三角形的等分切割與重組的問題, 在文章中作者以重組拼圖的方式, 說明了任意三角形的面積為第 $\langle 3, 1 \rangle$ 組同向切割線所得到的中央三角形面積的 7 倍, 其步驟順序分別如下圖(a)、(b)、(c)、(d)所示; 然而文章中並沒有充分說明解決之方法及原理, 這引發我們了的好奇; 因此本研究將以不同角度方法, 重新探討詮釋此問題, 並將性質加以推廣。



貳、目的

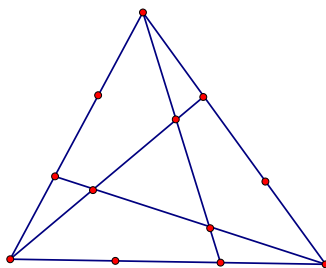
- (1) 探討任意三角形其第 $\langle n, m \rangle$ 組同向切割線之性質。
- (2) 探討任意梯形其第 $\langle n, 1 \rangle$ 組與第 $\langle n, m \rangle$ 組同向切割線之性質。
- (3) 探討平行四邊形其第 $\langle n, m \rangle$ 組同向切割線之性質。
- (4) 探討任意正 r 邊形其第 $\langle n, m \rangle$ 組同向切割線之性質, 並對其極限值做探討。

參、研究過程

一、定義：

(一) 同向切割線：

任意 r 邊形，將其所有邊分成 n 等分，將每個頂點連接至下一邊順時針方向數來的第 m 個等分點，我們稱為第 $\langle n, m \rangle$ 組同向切割線。例如：圖(一)為一任意三角形的第 $\langle 3, 1 \rangle$ 組同向切割線。而第 $\langle n, m \rangle$ 組同向切割線所切割出來的中央多邊形面積我們將以符號 $A_{r, \langle n, m \rangle}$ 表示(原 r 邊形面積則以 A_r 來表示)。

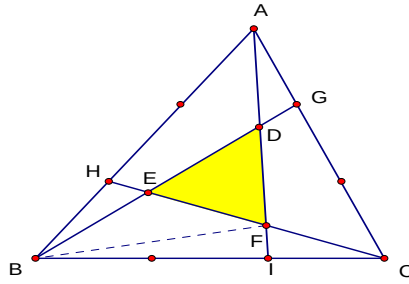


圖一 任意三角形的第 $\langle 3, 1 \rangle$ 組同向切割線

二、探討三角形同向分割的幾何性質：

透過上述的定義，我們先來探討 **Proof Without Words II** 中的 **Heptasection of a triangle** 問題，該問題其實是求 $\frac{A_3}{A_{3, \langle 3, 1 \rangle}}$ 之比例問題，底下我們將用不同方法來處理證明：

我們先將標示出頂點(如下圖二所示)，並連接 $\overline{BF}$ 。



(圖二)

我們令 $\triangle ABC = a$ 、 $\triangle AFC = x$ 、 $\triangle AHF = y$ 、 四邊形 $BHFI = w$ 、
 $\triangle FIC = z$ 。

$$1. \quad \triangle ABG + \triangle AIC + \triangle BCH$$

$$= (\triangle ABD + \triangle ADG) + (\triangle AFC + \triangle FIC) + (\triangle BCE + \triangle BHE)$$

$$= \triangle ABD + \triangle AFC + \triangle BCE + \triangle DEF = a$$

$$\Rightarrow \triangle DEF = \triangle ADG + \triangle BHE + \triangle FIC$$

$$2. \quad x + z = w + z = \frac{1}{3}a$$

$$\Rightarrow x = w$$

$$\frac{x}{y} = \frac{\triangle BFC}{\triangle BHF} = \frac{3z}{w-2z} = \frac{3z}{x-2z}$$

由上述條件可列出下列聯立方程式

$$\Rightarrow \begin{cases} x + y = \frac{2}{3}a \dots\dots\dots(A) \\ x + z = \frac{1}{3}a \dots\dots\dots(B) \\ \frac{x}{y} = \frac{3z}{x-2z} \dots\dots\dots(C) \end{cases}$$

由(C) 我們令 $x = 3zl$ 、 $y = (x - 2z)l$ 代入 (A)

$$\Rightarrow x + y = 3zl + (x - 2z)l = l(x + z) = \frac{1}{3}al \dots \dots \dots (D)$$

比較(A)、(D)兩式可得 $l = 2$

$$\Rightarrow x = 3zl = 6z \text{ 代入 (B)}$$

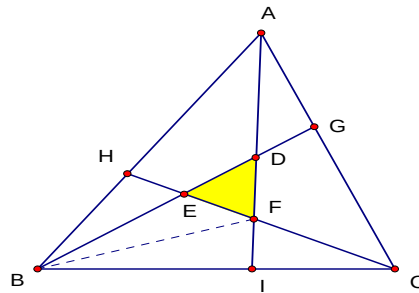
$$\Rightarrow z = \frac{1}{21}a = \Delta FIC, \text{ 同理 } \Delta BHE = \Delta ADG = z = \frac{1}{21}a$$

$$\Rightarrow \Delta DEF = \Delta ADG + \Delta BHE + \Delta FIC = 3z = \frac{1}{7}a$$

$$\Rightarrow \frac{A_3}{A_{3<3,1>}} = \frac{\Delta ABC}{\Delta DEF} = 7$$

接下來，我們試著去推廣，探討第 $\langle n, 1 \rangle$ 組同向切割線所形成的 $\frac{A_3}{A_{3\langle n, 1 \rangle}}$

比值問題。



同樣的方法，令 $\Delta ABC = a$ 、 $\Delta AFC = x$ 、 $\Delta AHF = y$ 、四邊形 $BHFI = w$ 、 $\Delta FIC = z$

$$1. \quad \Delta ABG + \Delta AIC + \Delta BCH = \frac{3a}{n}$$

$$\Rightarrow \Delta ADG + \Delta BEH + \Delta FIC = \Delta DEF - \frac{a(n-3)}{n}$$

$$2. \quad x+z=w+z=\frac{a}{n}$$

$$\Rightarrow x=w, \text{ 又 } \frac{x}{y} = \frac{\Delta BFC}{\Delta BHF} = \frac{nz}{w-(n-1)z} = \frac{nz}{x-(n-1)z}$$

由上述條件可列出下列聯立方程式：

$$\Rightarrow \begin{cases} x+y=\frac{a(n-1)}{n} \dots\dots\dots(1) \\ x+z=\frac{a}{n} \dots\dots\dots(2) \\ \frac{x}{y}=\frac{nz}{x-(n-1)z} \dots\dots\dots(3) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{令 } x=nzr \text{ 、 } y=[x-(n-1)z]r \text{ 代入 (1)}$$

$$\Rightarrow x+y=r\{nz+[x-(n-1)z]\}=r(x+z)=\frac{a(n-1)}{n} \dots\dots\dots(4)$$

(2) 代入 (4)

$$\Rightarrow r=n-1$$

$$\Rightarrow x=nzr=n(n-1)z \text{ 代入 (2)}$$

$$\Rightarrow x+z=n(n-1)z+z=(n^2-n+1)z=\frac{a}{n}$$

$$\Rightarrow z=\frac{a}{n(n^2-n+1)}=\Delta FIC \text{ , 同理}$$

$$\Delta BHE=\Delta ADG=z=\frac{a}{n(n^2-n+1)}$$

$$\Rightarrow \Delta DEF=\Delta ADG+\Delta BEH+\Delta FIC+\frac{a(n-3)}{n}$$

$$=\frac{3a}{n(n^2-n+1)}+\frac{a(n-3)}{n}=\frac{3a+a(n-3)(n^2-n+1)}{n(n^2-n+1)}$$

$$=\frac{a(n-2)^2}{n^2-n+1}$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta ABC}{\Delta DEF} = \frac{n^2 - n + 1}{(n-2)^2}$$

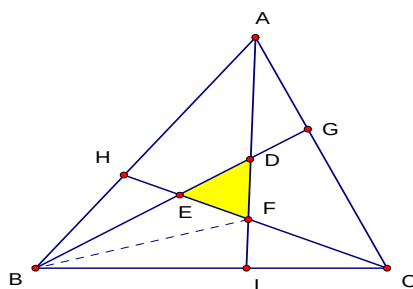
定理一：任意三角形，其原三角形面積 A_3 與第 $\langle n, 1 \rangle$ 組同向切割線所切割出來

的三角形面積 $A_{3\langle n, 1 \rangle}$ 比值為定值，其定值為 $\frac{A_3}{A_{3\langle n, 1 \rangle}} = \frac{n^2 - n + 1}{(n-2)^2}$ 。

有了定理（一）之後，將三角形第 $\langle n, 1 \rangle$ 組同向切割線推廣至將三角形第 $\langle n, m \rangle$ 組同向切割線：

研究（二）：任意三角形第 $\langle n, m \rangle$ 組同向切割線所切割出來的圖形。

$$\text{試求：} \frac{A_3}{A_{3\langle n, m \rangle}} = ?$$



（圖三）

連 $\overline{BF}$ ，令 $\Delta ABC = a$ 、 $\Delta AFC = x$ 、 $\Delta AHF = y$ 、四邊形 $BHFI = w$ 、 $\Delta FIC = z$ 。

以下是針對研究（二）的討論：

$$1. \Delta ABG + \Delta AIC + \Delta BCH = \frac{3ma}{n}$$

$$\Rightarrow \Delta ADG + \Delta BEH + \Delta FIC = \Delta DEF - \frac{a(n-3m)}{n}$$

$$x + z = w + z = \frac{ma}{n}$$

$$\Rightarrow x = w, \text{ 又 } \frac{x}{y} = \frac{\Delta BFC}{\Delta BHF} = \frac{\frac{n}{m}}{w - \frac{z(n-m)}{m}} = \frac{\frac{n}{m}}{x - \frac{z(n-m)}{m}}$$

由上述條件可列出下列聯立方程式：

$$\begin{cases} x + y = \frac{a(n-m)}{n} \dots\dots\dots (G_1) \\ x + z = \frac{ma}{n} \dots\dots\dots (G_2) \\ \frac{x}{y} = \frac{\frac{n}{m}}{x - \frac{z(n-m)}{m}} \dots\dots\dots (G_3) \end{cases}$$

$$\text{令 } x = \frac{nzr}{m} \text{ 、 } y = \left[x - \frac{z(n-m)}{m} \right] r \text{ , 代入 } (G_1)$$

$$\Rightarrow x + y = r \left[\frac{nz}{m} + x - \frac{z(n-m)}{m} \right] = r(x + z) = \frac{rma}{n} = \frac{a(n-m)}{n}$$

$$\Rightarrow r = \frac{n-m}{m}$$

$$\Rightarrow x = \frac{nzr}{m} = \frac{nz(n-m)}{m^2} \text{ 代入 } (G_2)$$

$$\Rightarrow x + z = z \left[\frac{n^2 - mn + m^2}{m^2} \right] = \frac{ma}{n}$$

$$\Rightarrow z = a \left(\frac{m}{n} \times \frac{m^2}{n^2 - mn + m^2} \right) = \frac{am^3}{n(n^2 - mn + m^2)}$$

$$\text{同理 } \Delta BHE = \Delta ADG = z = \frac{am^3}{n(n^2 - mn + m^2)} \circ$$

$$\begin{aligned}
2. \Delta DEF &= 3z + \frac{a(n-3z)}{n} \\
&= a \left[\frac{3m^3}{n(n^2-mn+m^2)} + \frac{n-3m}{n} \right] = a \left[\frac{3m^3 + (n-3m)(n^2-mn+m^2)}{n(n^2-mn+m^2)} \right] \\
&= \frac{a(n-2m)^2}{n^2-mn+m^2} \Rightarrow \frac{\Delta ABC}{\Delta DEF} = \frac{n^2-mn+m^2}{(n-2m)^2}
\end{aligned}$$

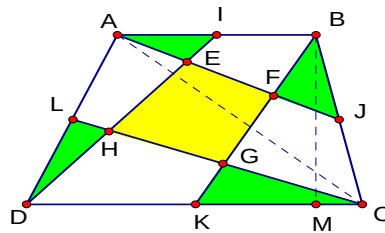
定理二：任意三角形，其原三角形面積 A_3 與第 $\langle n, m \rangle$ 組同向切割線所切割出來

的三角形面積 $A_{3\langle n, m \rangle}$ 比值為定值，其定值為 $\frac{A_3}{A_{3\langle n, m \rangle}} = \frac{n^2-mn+m^2}{(n-2m)^2}$ 。

三、探討四邊形同向分割的幾何性質：

研究（三）：探討任意梯形（如圖（四））。試求：原四邊形面積 A_4 與第 $\langle n, 1 \rangle$

組同向切割線所切割出來的四邊形面積 $A_{4\langle n, 1 \rangle}$ 之比值。



圖(四)

將研究（三）分成以下幾點討論：

（一）第 $\langle 2, 1 \rangle$ 組同向切割線：

將研究座標化。令原點 $C = (0, 0)$ 、 $\overline{AD} = 2a$ 、 $\overline{AB} = 2b$ 、 $\overline{BC} = 2c$ 、

$\overline{CD} = 2d$ 、高 $\overline{BM} = 2h$ （如圖（四））

1. 連 $\overline{AC}$

$$\Rightarrow \triangle ABJ = \triangle ACJ, \triangle DCL = \triangle ACL$$

$$\Rightarrow S_{AJCL} = \triangle ABJ + \triangle CDL = \frac{1}{2} S_{ABCD}, \text{ 同理}$$

$$S_{IBKD} = \triangle AID + \triangle BCK = \frac{1}{2} S_{ABCD}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow S_{EFGH} &= S_{ABCD} - (\triangle ABJ + \triangle BCK + \triangle CDL + \triangle AID) + \\ &\quad (\triangle AIE + \triangle BJF + \triangle CKG + \triangle DLH) \\ &= \triangle AIE + \triangle BJF + \triangle CKG + \triangle DLH \end{aligned}$$

2. $K = (-d, 0)$ 、 $D = (-2d, 0)$ 、 $\overline{BM} = 2h$

$$\Rightarrow L = (h \cot \angle D - 2d, h)、B = (-2h \cot \angle C, 2h)$$

由點斜式： $y - y_0 = m(x - x_0)$ 可知

$$\Rightarrow \overline{CL}: y = \frac{hx}{h \cot \angle D - 2d}、\overline{KB}: y = \frac{2h(x+d)}{-2h \cot \angle C + d}$$

$$\text{欲解點 } G \Rightarrow \text{解} \begin{cases} y = \frac{hx}{h \cot \angle D - 2d} \dots\dots\dots (D_1) \\ y = \frac{2h(x+d)}{-2h \cot \angle C + d} \dots\dots\dots (D_2) \end{cases}$$

$$[(D_1) - (D_2)]$$

$$\Rightarrow \frac{hx}{h \cot \angle D - 2d} + \frac{2h(x+d)}{2h \cot \angle C - d} = 0$$

$$\Rightarrow x \left[\frac{h}{h \cot \angle D - 2d} + \frac{2h}{2h \cot \angle C - d} \right] = \frac{2hd}{d - 2h \cot \angle C}$$

$$\Rightarrow x \left[\frac{2h^2(\cot \angle C + \cot \angle D) - 5hd}{(h \cot \angle D - 2d)(2h \cot \angle C - d)} \right] = \frac{2hd}{d - 2h \cot \angle C}$$

$$\Rightarrow x = \frac{2d(2d - h \cot \angle D)}{2h(\cot \angle C + \cot \angle D) - 5d} \text{ 代入 } (D_1)$$

$$\Rightarrow y = \frac{2hd}{5d - 2h(\cot \angle C + \cot \angle D)}$$

$$\Rightarrow \text{在 } \triangle CKG \text{ 中 } \overline{KC} \text{ 上的高為 } \frac{2hd}{5d - 2h(\cot \angle C + \cot \angle D)}$$

$$\Rightarrow \triangle CKG = \frac{hd^2}{5d - 2h(\cot \angle C + \cot \angle D)} \quad \text{同理}$$

$$\triangle AIE = \frac{hb^2}{5b - 2h(\cot \angle A + \cot \angle B)}$$

$$3. \quad K = (-d, 0) \quad D = (-2d, 0) \quad \overline{BM} = 2h$$

$$\Rightarrow A = (2h \cot \angle D - 2d, 2h) \quad I = (2h \cot \angle D + b - 2d, 2h)$$

由點斜式： $y - y_0 = m(x - x_0)$ 可知

$$\Rightarrow \overline{DI} : y = \frac{2h(x + 2d)}{2h \cot \angle D + b} \quad , \quad \text{又 } \overline{CL} : y = \frac{hx}{h \cot \angle D - 2d}$$

欲解點 H

$$\Rightarrow \text{解} \begin{cases} y = \frac{2h(x + 2d)}{2h \cot \angle D + b} \dots\dots\dots(E_1) \\ y = \frac{hx}{h \cot \angle D - 2d} \dots\dots\dots(E_2) \end{cases}$$

$$[(E_1) - (E_2)]$$

$$\Rightarrow \frac{2h(x + 2d)}{2h \cot \angle D + b} - \frac{hx}{h \cot \angle D - 2d} = 0$$

$$\Rightarrow x \left[\frac{2h}{2h \cot \angle D + b} - \frac{h}{h \cot \angle D - 2d} \right] = \frac{-4hd}{2h \cot \angle D + b}$$

$$\Rightarrow x \left[\frac{4hd + bh}{(2h \cot \angle D + b)(h \cot \angle D - 2d)} \right] = \frac{4hd}{2h \cot \angle D + b}$$

$$\Rightarrow x = \frac{4d(h \cot \angle D - 2d)}{4d + b} \quad \text{代入 } (E_2)$$

$$\Rightarrow y = \frac{4dh}{4d+b}$$

$$\Rightarrow \Delta DHL = \Delta DCL - \Delta DHC$$

$$= \frac{2dh}{2} - \frac{2d \times \frac{4dh}{4d+b}}{2} = \frac{bdh}{4d+b} \quad \text{同理 } \Delta B J F = \frac{bdh}{4b+d}$$

$$4. \Delta KGC = \frac{hd^2}{5d - 2h(\cot \angle C + \cot \angle D)} = \frac{hd^2}{5d - 2(h \cot \angle C + h \cot \angle D)}$$

$$= \frac{hd^2}{5d - (2d - 2b)} = \frac{hd^2}{3d + 2b}$$

$$\Delta AIE = \frac{hb^2}{5b - 2h(\cot \angle A + \cot \angle B)} = \frac{hb^2}{5b + 2h(\cot \angle C + \cot \angle D)}$$

$$= \frac{hb^2}{5b + (2d - 2b)} = \frac{hb^2}{3b + 2d}$$

$$\Rightarrow S_{EFGH} = \Delta CKG + \Delta AIE + \Delta B J F + \Delta DLH$$

$$= \frac{hd^2}{3d + 2b} + \frac{hb^2}{3b + 2d} + \frac{bdh}{4b + d} + \frac{bdh}{4d + b}$$

$$= h \left[\frac{3bd(b+d) + 2(b^3 + d^3)}{6b^2 + 13bd + 6d^2} + \frac{5bd(b+d)}{4b^2 + 17bd + 4d^2} \right]$$

$$= h(b+d) \left[\frac{(8b^4 + 38b^3 + 33b^2d^2 + 38bd^3 + 8d^4) + (30b^3d + 65b^2d^2 + 30bd^3)}{(24b^4 + 154b^3d + 269b^2d^2 + 154bd^3 + 24d^4)} \right]$$

$$= \frac{h(b+d)(8b^4 + 68b^3 + 98b^2d^2 + 68bd^3 + 8d^4)}{24b^4 + 154b^3d + 269b^2d^2 + 154bd^3 + 24d^4}$$

$$\Rightarrow \frac{S_{ABCD}}{S_{EFGH}} = \frac{2h(b+d)}{\frac{h(b+d)(8b^4 + 68b^3 + 98b^2d^2 + 68bd^3 + 8d^4)}{24b^4 + 154b^3d + 269b^2d^2 + 154bd^3 + 24d^4}}$$

$$= \frac{48b^4 + 308b^3d + 538b^2d^2 + 308bd^3 + 48d^4}{8b^4 + 68b^3 + 98b^2d^2 + 68bd^3 + 8d^4}$$

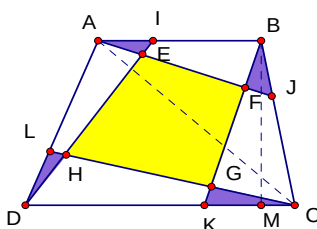
5. 求出 $\frac{S_{ABCD}}{S_{EFGH}}$ 的範圍：

$$\begin{aligned}\frac{S_{ABCD}}{S_{EFGH}} &= \frac{48b^4 + 308b^3d + 538b^2d^2 + 308bd^3 + 48d^4}{8b^4 + 68b^3 + 98b^2d^2 + 68bd^3 + 8d^4} \\ &= 5 + \frac{4b^4 - 16b^3d + 24b^2d^2 - 16bd^3 + 4d^4}{4b^4 + 34b^3d + 49b^2d^2 + 34bd^3 + 4d^4} \\ &= 5 + \frac{4(b-d)^4}{4b^4 + 34b^3d + 49b^2d^2 + 34bd^3 + 4d^4} \geq 5 \\ \frac{S_{ABCD}}{S_{EFGH}} &= 6 - \frac{25bd(2b^2 + bd + 2d^2)}{4b^4 + 34b^3d + 49b^2d^2 + 34bd^3 + 4d^4} < 6\end{aligned}$$

$$\Rightarrow 5 \leq \frac{S_{ABCD}}{S_{EFGH}} = \frac{A_4}{A_{4<2,1>}} < 6$$

接著我們將第 $\langle 2,1 \rangle$ 組同向切割線推廣至第 $\langle n,1 \rangle$ 組同向切割線

(二) 第 $\langle n,1 \rangle$ 組同向切割線：



圖(五)

將研究座標化。令原點 $C = (0,0)$ 、 $\overline{AD} = na$ 、 $\overline{AB} = nb$ 、 $\overline{BC} = nc$ 、

$\overline{CD} = nd$ 、高 $\overline{BM} = nh$ (如圖(五))

1. 連 $\overline{AC}$

$$\Rightarrow \Delta ACJ = (n-1)\Delta ABJ \text{、} \Delta ACL = (n-1)\Delta CDL$$

$$\Rightarrow S_{AJCL} = (n-1)(\Delta ABJ + \Delta CDL) \text{ 同理}$$

$$S_{IBKD} = (n-1)(\Delta AID + \Delta BCK)$$

$$\Rightarrow S_{EFGH} = S_{ABCD} - (\Delta ABJ + \Delta BCK + \Delta CDL + \Delta AID) +$$

$$(\Delta AIE + \Delta BJF + \Delta CKG + \Delta DLH)$$

$$= \Delta AIE + \Delta BJF + \Delta CKG + \Delta DLH + \frac{n-2}{n} S_{ABCD}$$

$$2. \quad K = (-d, 0) \quad D = (-nd, 0) \quad \overline{BM} = nh$$

$$\Rightarrow L = (h \cot \angle D - nd, h) \quad B = (-3h \cot \angle C, 3h)$$

由點式： $y - y_0 = m(x - x_0)$ 可知

$$\Rightarrow \overline{CL}: y = \frac{hx}{h \cot \angle D - nd} \quad \overline{KB}: y = \frac{nh(x+d)}{-nh \cot \angle C + d}$$

欲點 G

$$\Rightarrow \begin{cases} y = \frac{hx}{h \cot \angle D - nd} \dots\dots\dots(1) \\ y = \frac{nh(x+d)}{-nh \cot \angle C + d} \dots\dots\dots(2) \end{cases}$$

$$[(1)-(2)]$$

$$\Rightarrow \frac{hx}{h \cot \angle D - nd} + \frac{nh(x+d)}{nh \cot \angle C - d} = 0$$

$$\Rightarrow x \left[\frac{h}{h \cot \angle D - nd} + \frac{nh}{nh \cot \angle C - d} \right] = \frac{nhd}{d - nh \cot \angle C}$$

$$\Rightarrow x \left[\frac{nh^2(\cot \angle C + \cot \angle D) - (n^2 + 1)hd}{(h \cot \angle D - nd)(nh \cot \angle C - d)} \right] = \frac{nhd}{d - nh \cot \angle C}$$

$$\Rightarrow x = \frac{nd(nd - h \cot \angle D)}{nh(\cot \angle C + \cot \angle D) - (n^2 + 1)d} \text{ 代入 (1)}$$

$$\Rightarrow y = \frac{ndh}{(n^2 + 1)d - nh(\cot \angle C + \cot \angle D)}$$

$$\Rightarrow \text{在 } \triangle CKG \text{ 中 } \overline{KC} \text{ 上的高為 } \frac{ndh}{(n^2+1)d - nh(\cot \angle C + \cot \angle D)}$$

$$\Rightarrow \Delta CKG = \frac{nd^2h}{2(n^2+1)d - 2nh(\cot \angle C + \cot \angle D)}$$

$$\text{同理} \quad \Delta AIE = \frac{nb^2h}{2(n^2+1)b - 2nh(\cot \angle A + \cot \angle B)}$$

$$3. \quad K = (-d, 0) \text{、} D = (-nd, 0) \text{、} \overline{BM} = nh$$

$$\Rightarrow A = (nh \cot \angle D - nd, nh) \text{、} I = (nh \cot \angle D + b - nd, nh)$$

由點斜式 $y - y_0 = m(x - x_0)$ 可知

$$\Rightarrow \overline{DI}: y = \frac{nh(x+nd)}{nh \cot \angle D + b} \text{、} \overline{LC}: y = \frac{hx}{h \cot \angle D - nd}$$

欲解點 H

$$\Rightarrow \text{解} \begin{cases} y = \frac{nh(x+nd)}{nh \cot \angle D + b} \dots\dots\dots(1) \\ y = \frac{hx}{h \cot \angle D - nd} \dots\dots\dots(2) \end{cases}$$

$$(1) - (2)$$

$$\Rightarrow \frac{nh(x+nd)}{nh \cot \angle D + b} - \frac{hx}{h \cot \angle D - nd} = 0$$

$$\Rightarrow x \left[\frac{nh}{nh \cot \angle D + b} - \frac{h}{h \cot \angle D - nd} \right] = \frac{-n^2hd}{nh \cot \angle D + b}$$

$$\Rightarrow x \left[\frac{-(n^2hd + bh)}{(nh \cot \angle D + b)(h \cot \angle D - nd)} \right] = \frac{-n^2hd}{nh \cot \angle D + b}$$

$$\Rightarrow x = \frac{n^2d(h \cot \angle D - nd)}{n^2d + b} \text{ 代入 (2)}$$

$$\Rightarrow y = \frac{n^2dh}{n^2d + b}$$

$$\Rightarrow \Delta DLH = \Delta CDL - \Delta CDH$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{nd \times h}{2} - \frac{nd \times \frac{n^2 dh}{n^2 d + b}}{2} \\
&= \frac{nb dh}{2n^2 d + 2b} \quad \text{同理 } \triangle B J F = \frac{nb dh}{2n^2 b + 2d}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
4. \quad \triangle C K G &= \frac{nd^2 h}{2(n^2 + 1)d - 2nh(\cot \angle C + \cot \angle D)} \\
&= \frac{nd^2 h}{2(n^2 + 1)d - 2(nh \cot \angle C + nh \cot \angle D)} = \frac{nd^2 h}{2(n^2 + 1)d - 2(nd - nb)} \\
&= \frac{nd^2 h}{2(n^2 - n + 1)d + 2nb} \quad \text{同理 } \triangle A I E = \frac{nb^2 h}{2(n^2 - n + 1)b + 2nd} \\
\Rightarrow S_{EFGH} &= \triangle C K G + \triangle A I E + \triangle D L H + \triangle B J F + \left(\frac{n-2}{n}\right) S_{ABCD} \\
&= \triangle C K G + \triangle A I E + \triangle D L H + \triangle B J F + \left(\frac{n-2}{n}\right) \frac{n^2 h(b+d)}{2} \\
&= \frac{nd^2 h}{2(n^2 - n + 1)d + 2nb} + \frac{nb^2 h}{2(n^2 - n + 1)b + 2nd} + \frac{nb dh}{2n^2 d + 2b} + \frac{nb dh}{2n^2 b + 2d} \\
&\quad + \frac{n(n-2)(b+d)h}{2} \\
&= \frac{nh}{2} \left[\frac{d^2}{(n^2 - n + 1)d + nb} + \frac{b^2}{(n^2 - n + 1)b + nd} + \frac{bd}{n^2 d + b} + \frac{bd}{n^2 b + d} \right] \\
&= \frac{nh(b+d)}{2} \left[\frac{nb^2 + (n-1)^2 bd}{n(n^2 - n + 1)b^2 + (n^4 - 2n^3 + 4n^2 - 2n + 1)bd + n(n^2 - n + 1)d^2} \right. \\
&\quad \left. + \frac{(n^2 + 1)bd}{n^2 b^2 + (n^4 + 1)bd + n^2 d^2} + n - 2 \right]
\end{aligned}$$

$$= \frac{nh(b+d)}{2} \left[\frac{n^3(n-1)^3b^4 + n^2(n-1)^2(n^4 - 2n^2 + 4n + 1)b^3d + n(n-1)^3(n^5 - n^4 + n^3(n^2 - n + 1)b^4 + (n^7 - n^5 + 4n^4 - n^3 + n)b^3d + (n^8 - 2n^7 + 4n^6 +$$

$$\frac{2n^3 + 4n^2 + n - 1)b^2d^2 + n^2(n-1)^2(n^4 - 2n^2 + 4n + 1)bd^3 + n^3(n-1)^3d^4}{4n^2 - 2n + 1)b^2d^2 + (n^7 - n^5 + 4n^4 - n^3 + n)bd^3 + n^3(n^2 - n + 1)d^4} \right]$$

令

$$\left[\frac{n^3(n-1)^3b^4 + n^2(n-1)^2(n^4 - 2n^2 + 4n + 1)b^3d + n(n-1)^3(n^5 - n^4 + 2n^3 + 4n^2 + n - 1)b^2d^2 + n^2(n-1)^2(n^4 - 2n^2 + 4n + 1)bd^3 + n^3(n-1)^3d^4}{n^3(n^2 - n + 1)b^4 + (n^7 - n^5 + 4n^4 - n^3 + n)b^3d + (n^8 - 2n^7 + 4n^6 + 4n^2 - 2n + 1)b^2d^2 + (n^7 - n^5 + 4n^4 - n^3 + n)bd^3 + n^3(n^2 - n + 1)d^4} \right] = k$$

$$\Rightarrow \frac{A_4}{A_{4<n,1>}} = \frac{(nb + nd)nh}{\frac{2}{nh(b+d)k}} = \frac{n}{k} \quad \text{令 } k \text{ 的分母為 } L$$

$$\Rightarrow \frac{A_4}{A_{4<n,1>}} = \frac{n}{k}$$

$$= \frac{n^4(n^2 - n + 1)b^4 + (n^8 - n^6 + 4n^5 - n^4 + n^2)b^3d + (n^9 - 2n^8 + 4n^7 + 4n^3 - n^3(n-1)^3b^4 + n^2(n-1)^2(n^4 - 2n^2 + 4n + 1)b^3d + n(n-1)^3(n^5 - n^4 + 2n^3 + 4n^2$$

$$\frac{-2n^2 + n)b^2d^2 + (n^8 - n^6 + 4n^5 - n^4 + n^2)bd^3 + n^4(n^2 - n + 1)d^4}{+n-1)b^2d^2 + n^2(n-1)^2(n^4 - 2n^2 + 4n + 1)bd^3 + n^3(n-1)^3d^4}$$

$$= \frac{n^2 + 1}{(n-1)^2} + \frac{n^3b^4 - 4n^3b^3d + 6n^3b^2d^2 - 4n^3bd^3 + n^3d^4}{L}$$

$$= \frac{n^2 + 1}{(n-1)^2} + \frac{n^3(b-d)^4}{L} \quad (\text{可說明 } \frac{A_4}{A_{4<n,1>}} \text{ 只與 } n, b, d \text{ 有關與高 } (nh) \text{ 無關})$$

$$= \frac{n(n^2 - n + 1)}{(n-1)^3} - \frac{n(n^2 + 1)^2 [nb^2 + (n-1)^2bd + nd^2]}{(n-1)L}$$

$$\Rightarrow \frac{n^2+1}{(n-1)^2} \leq \frac{A_4}{A_{4<n,1>}} < \frac{n(n^2-n+1)}{(n-1)^3}$$

定理三：任意梯形，令其中平行的兩邊為 b 和 d ，則原四邊形面積 A_4 與第 $<n,1>$

組同向切割線所切割出來的四邊形面積 $A_{4<n,1>}$ 之比值為：

$$\left[\frac{n^3(n-1)^3b^4 + n^2(n-1)^2(n^4-2n^2+4n+1)b^3d + n(n-1)^3(n^5-n^4+2n^3+4n^2}{n^3(n^2-n+1)b^4 + (n^7-n^5+4n^4-n^3+n)b^3d + (n^8-2n^7+4n^6+4n^2} \right. \\ \left. \frac{+n-1)b^2d^2 + n^2(n-1)^2(n^4-2n^2+4n+1)bd^3 + n^3(n-1)^3d^4}{-2n+1)b^2d^2 + (n^7-n^5+4n^4-n^3+n)bd^3 + n^3(n^2-n+1)d^4} \right]$$

$$\text{當 } b=d \text{ 時(亦即該四邊形為平行四邊形), } \frac{A_4}{A_{4<n,1>}} = \frac{n^2+1}{(n-1)^2}$$

定理四：任意梯形，令其中平行的兩邊為 b 和 d ，則原四邊形面積 A_4 與第 $<n,1>$

組同向切割線所切割出來的四邊形面積 $A_{4<n,1>}$ 之比值，其範圍為：

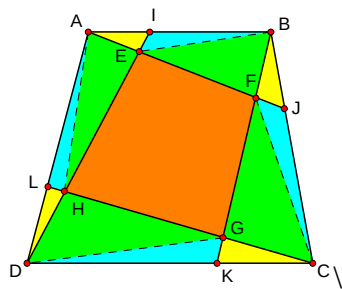
$$\frac{n^2+1}{(n-1)^2} \leq \frac{A_4}{A_{4<n,1>}} < \frac{n(n^2-n+1)}{(n-1)^3}$$

$$\text{當 } b=d \text{ 時(亦即該四邊形為平行四邊形), } \frac{A_4}{A_{4<n,1>}} = \frac{n^2+1}{(n-1)^2}$$

接著探討梯形第 $<n,1>$ 組同向切割線所截出來的線段比例

研究（四）：任意梯形第 $<n,1>$ 組同向切割線（如圖（六））。試求：同向切割

線所截出來的線段比例(即求 $\overline{BF}:\overline{FG}:\overline{GK}、\overline{CG}:\overline{GH}:\overline{HL}、\overline{DH}:\overline{HE}:\overline{EI}、$
 $\overline{AE}:\overline{EF}:\overline{FJ}$)



圖(六)

1. 求 $\overline{BF} : \overline{FG} : \overline{GK}$ 、 $\overline{DH} : \overline{HE} : \overline{EI}$

由研究(四)可知：

$$\Delta BKF = \frac{nb dh}{2n^2b + 2d} \quad , \quad \Delta CKG = \frac{nd^2h}{2(n^2 - n + 1)d + 2nb} \quad ,$$

$$\Delta BCK = \frac{d \times nh}{2} = \frac{ndh}{2} \quad , \quad \text{連 } \overline{CF}$$

$$\Rightarrow \Delta CKF = \Delta BCK - \Delta BCF = \frac{ndh}{2} - \frac{n^2bdh}{2n^2b + 2d} = \frac{dh[n^2(n-1)b + nd]}{2n^2b + 2d}$$

$$\Rightarrow \frac{\overline{BF}}{\overline{KF}} = \frac{\Delta BCF}{\Delta CKF} = \frac{\frac{n^2bdh}{2n^2b + 2d}}{\frac{dh[n^2(n-1)b + nd]}{2n^2b + 2d}} = \frac{nb}{n(n-1)b + d}$$

$$\frac{\overline{BF}}{\overline{KG}} = \frac{\Delta BCF}{\Delta CKG} = \frac{\frac{n^2bdh}{2n^2b + 2d}}{\frac{nd^2h}{2(n^2 - n + 1)d + 2nb}} = \frac{n^2b^2 + n(n^2 - n + 1)bd}{d^2 + n^2bd}$$

$$\Rightarrow \frac{\overline{BF}}{\overline{GF}} = \frac{\overline{BF}}{\overline{KF} - \overline{KG}} = \frac{n^2b^2 + n(n^2 - n + 1)bd}{n^2(n-1)b^2 + n^2(n-1)^2bd + n(n-1)d^2}$$

$$\Rightarrow \overline{BF} : \overline{FG} : \overline{GK} = [n^2b^2 + n(n^2 - n + 1)bd] : [n^2(n-1)b^2 + n^2(n-1)^2bd + n(n-1)d^2] : [d^2 + n^2bd] \quad \text{同理}$$

$$\overline{DH} : \overline{HE} : \overline{EI}$$

$$= \left[n^2 d^2 + n(n^2 - n + 1)bd \right] : \left[n(n-1)b^2 + n^2(n-1)^2 bd + n^2(n-1)d^2 \right] \\ : \left[b^2 + n^2 bd \right]$$

$\Rightarrow$ 只要 b 、 d 比例恆為定值， $\overline{BF} : \overline{FG} : \overline{GK}$ 、 $\overline{DH} : \overline{HE} : \overline{EI}$ 比例恆為定值

$$2. \text{ 求 } \overline{CG} : \overline{GH} : \overline{HL} \text{、} \overline{AE} : \overline{EF} : \overline{FJ}$$

由研究（三）可知：

$$\Delta CKG = \frac{nd^2 h}{2(n^2 + 1)d - 2(nd - nb)} \text{、} \Delta DLH = \frac{nb dh}{2n^2 d + 2b} \text{、}$$

$$\Delta DCL = \frac{ndh}{2} \text{，連 } \overline{DG}$$

$$\Rightarrow \Delta DLG = \Delta DCL - \Delta DCG = \frac{ndh}{2} - \frac{n^2 d^2 h}{2(n^2 + 1)d - 2(nd - nb)}$$

$$= \frac{n(n-1)^2 h d^2 + n^2 b d h}{2(n^2 + 1)d - 2(nd - nb)}$$

$$\Rightarrow \frac{\overline{CG}}{\overline{GL}} = \frac{\Delta DCG}{\Delta DGL} = \frac{\frac{n^2 d^2 h}{2(n^2 + 1)d - 2(nd - nb)}}{\frac{n(n-1)^2 h d^2 + n^2 b d h}{2(n^2 + 1)d - 2(nd - nb)}} = \frac{nd}{nb + (n-1)^2 d}$$

$$\frac{\overline{CG}}{\overline{HL}} = \frac{\Delta DCG}{\Delta DHL} = \frac{\frac{n^2 d^2 h}{2(n^2 + 1)d - 2(nd - nb)}}{\frac{nb dh}{2n^2 d + 2b}} = \frac{nd(n^2 d + b)}{nb^2 + (n^2 - n + 1)bd}$$

$$\Rightarrow \frac{\overline{CG}}{\overline{GH}} = \frac{\overline{CG}}{\overline{GL} - \overline{HL}} = \frac{nd(n^2 d + b)}{n^2(n-1)^2 d^2 + n(n-1)(n+1)bd}$$

$$\Rightarrow \overline{CG} : \overline{GH} : \overline{HL} = (n^3 d^2 + nbd) : [n^2(n-1)^2 d^2 + n(n-1)(n+1)bd]$$

$$: [nb^2 + (n^2 - n + 1)bd] \quad \text{同理}$$

$$\overline{AE} : \overline{EF} : \overline{FJ} = (n^3 d^2 + nbd) : [n^2(n-1)^2 b^2 + n(n-1)(n+1)bd]$$

$$: [nd^2 + (n^2 - n + 1)bd]$$

$\Rightarrow$ 只要 b 、 d 比例恆為定值， $\overline{CG} : \overline{GH} : \overline{HL}$ 、 $\overline{AE} : \overline{EF} : \overline{FJ}$ 比例恆為定值

3. 當該四邊形為平行四邊形時：

即 $b = d$

$\Rightarrow$

$$\overline{BF} : \overline{FG} : \overline{GK} = \overline{DH} : \overline{HE} : \overline{EI} = [n^3 b^2 + n^2(n^2 - n + 1)b^2] : [n^3(n-1)b^2$$

$$+ n^3(n-1)^2 b^2 + n^2(n-1)b^2] : [nb^2 + n^3 b^2]$$

$$= [n^2(n^2 + 1)b^2] : [(n-1)n^2(n^2 + 1)b^2] : [n(n^2 + 1)b^2]$$

$$= n : n(n-1) : 1$$

$$\overline{CG} : \overline{GH} : \overline{HL} = \overline{AE} : \overline{EF} : \overline{FJ}$$

$$= (n^3 b^2 + nb^2) : [n^2(n-1)^2 b^2 + n(n-1)(n+1)b^2]$$

$$: [nb^2 + (n^2 - n + 1)b^2]$$

$$= [n(n^2 + 1)b^2] : [n(n-1)(n^2 + 1)b^2] : [(n^2 + 1)b^2]$$

$$= n : n(n-1) : 1 = \overline{BF} : \overline{FG} : \overline{GK} = \overline{DH} : \overline{HE} : \overline{EI}$$

$$\text{故 } \overline{BF} : \overline{FG} : \overline{GK} = \overline{DH} : \overline{HE} : \overline{EI} = \overline{BF} : \overline{FG} : \overline{GK} = \overline{DH} : \overline{HE} : \overline{EI}$$

定理五：任意梯形第 $\langle n, 1 \rangle$ 組同向切割線（如圖（六）），其同向切割線所截

出來的線段比例為：

$$\begin{cases} \overline{BF} : \overline{FG} : \overline{GK} = [n^2b^2 + n(n^2 - n + 1)bd] : [n^2(n-1)b^2 + n^2(n-1)^2bd + n(n-1)d^2] \\ : [d^2 + n^2bd] \\ \overline{DH} : \overline{HE} : \overline{EI} = [n^2d^2 + n(n^2 - n + 1)bd] : [n(n-1)b^2 + n^2(n-1)^2bd + n^2(n-1)d^2] \\ : [b^2 + n^2bd] \end{cases}$$

$$\begin{cases} \overline{CG} : \overline{GH} : \overline{HL} = (n^3d^2 + nbd) : [n^2(n-1)^2d^2 + n(n-1)(n+1)bd] \\ : [nb^2 + (n^2 - n + 1)bd] \\ \overline{AE} : \overline{EF} : \overline{FJ} = (n^3d^2 + nbd) : [n^2(n-1)^2b^2 + n(n-1)(n+1)bd] \\ : [nd^2 + (n^2 - n + 1)bd] \end{cases}$$

而且當 b 、 d 比例恆為定值時， $\overline{BF} : \overline{FG} : \overline{GK}$ 、 $\overline{DH} : \overline{HE} : \overline{EI}$ 、 $\overline{CG} : \overline{GH} : \overline{HL}$ 、
 $\overline{AE} : \overline{EF} : \overline{FJ}$ 之比例亦恆為定值。

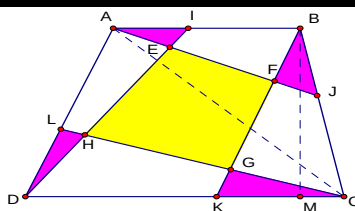
當 $b = d$ 時(亦即該四邊形為平行四邊形)

$$\Rightarrow \overline{BF} : \overline{FG} : \overline{GK} = \overline{DH} : \overline{HE} : \overline{EI} = \overline{BF} : \overline{FG} : \overline{GK} = \overline{DH} : \overline{HE} : \overline{EI} = n : n(n-1) : 1$$

接著將梯形第 $\langle n, 1 \rangle$ 組同向切割線推廣至第 $\langle n, m \rangle$ 組同向切割線

研究（五）：探討任意梯形（如圖（七））。試求：原四邊形面積 A_4 與第 $\langle n, m \rangle$

組同向切割線所切割出來的四邊形面積 $A_{4\langle n, m \rangle}$ 之比值。



圖(七)

將研究座標化。令原點 $C = (0, 0)$ 、 $\overline{AD} = na$ 、 $\overline{AB} = nb$ 、 $\overline{BC} = nc$ 、

$$\overline{CD} = nd、$$

高 $\overline{BM} = nh$ (如圖(七))

1. 連 $\overline{AC}$ ，對任意四邊形而言

$$\Rightarrow S_{EFGH} = S_{ABCD} - (\Delta ABJ + \Delta BCK + \Delta CDL + \Delta AID) +$$

$$(\Delta AIE + \Delta BJF + \Delta CKG + \Delta DLH)$$

$$= \Delta AIE + \Delta BJF + \Delta CKG + \Delta DLH + \frac{n-2m}{n} S_{ABCD}$$

2. 求 ΔCKG 、 ΔAIE ：

$$K = (-md, 0)、\overline{BM} = nh、C = (0, 0)$$

$$\Rightarrow B = (-nh \cot \angle C, nh)、L = (mh \cot \angle D - nd, mh)$$

由點斜式 $y - y_0 = m(x - x_0)$ 可知

$$\Rightarrow \overline{CL}: y = \frac{mhx}{mh \cot \angle D - nd}、\overline{KB}: y = \frac{nh(x + md)}{md - nh \cot \angle C} \quad \text{欲解點 } G$$

$$\Rightarrow \text{解} \begin{cases} y = \frac{mhx}{mh \cot \angle D - nd} \dots\dots\dots(1) \\ y = \frac{nh(x + md)}{md - nh \cot \angle C} \dots\dots\dots(2) \end{cases}$$

$$(1) - (2)$$

$$\Rightarrow \frac{mhx}{mh \cot \angle D - nd} + \frac{nh(x + md)}{nh \cot \angle C - md} = 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{mnd(nd - mh \cot \angle D)}{mnh(\cot \angle C + \cot \angle D) - (m^2 + n^2)d} \quad \text{代入(1)}$$

$$\Rightarrow y = \frac{m^2 ndh}{(m^2 + n^2)d - mnh(\cot \angle C + \cot \angle D)}$$

在 $\triangle CKG$ 中， $\overline{KC}$ 邊上的高為 $\frac{m^2ndh}{(m^2+n^2)d-mnh(\cot \angle C + \cot \angle D)}$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \triangle CKG &= \frac{m^2ndh}{(m^2+n^2)d-mnh(\cot \angle C + \cot \angle D)} \times \frac{md}{2} \\ &= \frac{m^3nd^2h}{2(m^2+n^2)d-2m(nh \cot \angle C + nh \cot \angle D)} \\ &= \frac{m^3nd^2h}{2(m^2+n^2)d-2m(nd-nb)} = \frac{m^3nhd^2}{2(m^2+n^2-mn)d+2mn b}\end{aligned}$$

$$\text{同理 } \triangle AIE = \frac{m^3nhb^2}{2(m^2+n^2-mn)b+2mnd}$$

3. 求 $\triangle DLH$ 、 $\triangle BJF$ ：

$$D = (-nd, 0) \text{、} A = (nh \cot \angle D - nd, nh)$$

$$\Rightarrow I = (nh \cot \angle D + mb - nd, nh)$$

由點斜式 $y - y_0 = m(x - x_0)$ 可知

$$\Rightarrow \overline{DI} : y = \frac{nh(x+nd)}{nh \cot \angle D + mb} \quad \text{又} \quad \overline{CL} : y = \frac{mhx}{mh \cot \angle D - nd} \text{，欲解點 } H$$

$$\Rightarrow \text{解} \begin{cases} y = \frac{nh(x+nd)}{nh \cot \angle D + mb} \dots\dots\dots(1) \\ y = \frac{mhx}{mh \cot \angle D - nd} \dots\dots\dots(2) \end{cases}$$

$$(1) - (2)$$

$$\Rightarrow \frac{nh(x+nd)}{nh \cot \angle D + mb} - \frac{mhx}{mh \cot \angle D - nd} = 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{n^2d(mh \cot \angle D - nd)}{n^2d + m^2b} \text{ 代入 (2)}$$

$$\Rightarrow y = \frac{mn^2hd}{n^2d + m^2b}$$

$$\Rightarrow \triangle DLH = \triangle CDL - \triangle DHC$$

$$= \frac{mnhd}{2} - \frac{nd \times \frac{mn^2hd}{n^2d + m^2b}}{2} = \frac{m^3nb dh}{2n^2d + 2m^2b} \quad \text{同理}$$

$$\Delta BJF = \frac{m^3nb dh}{2n^2b + 2m^2d}$$

4. $A_{4<n,m>}$:

$$S_{EFGH} = \Delta AIE + \Delta CKG + \Delta BJF + \Delta DLH + \frac{n-2m}{n} S_{ABCD}$$

$$= \frac{m^3nhb^2}{2(m^2 + n^2 - mn)b + 2mnd} + \frac{m^3nhd^2}{2(m^2 + n^2 - mn)d + 2mnb} + \frac{m^3nb dh}{2n^2b + 2m^2d} +$$

$$\frac{m^3nb dh}{2n^2d + 2m^2b} + \frac{n-2m}{n} \times \frac{(nb + nd)nh}{2}$$

將上式化簡成下列式子

其中

$$x = m^3n^3(n^2 + m^2 - mn)b^4 + mn(n^3 - mn^2 + m^2n + m^3)(n^3 + mn^2 - m^2n + m^3) \times$$

$$b^3d + (n^8 - 2mn^7 + 4m^2n^6 + 4m^6n^2 - 2m^7m + m^8)b^2d^2 + mn(n^3 - mn^2 + m^2n + m^3) \times$$

$$(n^3 + mn^2 - m^2n + m^3)bd^3 + m^3n^3(n^2 + m^2 - mn)d^4 > 0$$

$$y = m^3n^2(n-m)^3b^4 + mn(n-m)^2(n^4 - 2m^2n^2 + 4m^3n + m^4)b^3d + (n-m)^3 \times$$

$$(n^5 - mn^4 + 2m^2n^3 + 4m^3n^2 + m^4n - m^5)b^2d^2 + mn(n-m)^2(n^4 - 2m^2n^2 + 4m^3n$$

$$+ m^4)bd^3 + m^3n^2(n-m)^3d^4$$

$$\Rightarrow \frac{A_4}{A_{4<n,m>}} = \frac{S_{ABCD}}{S_{EFGH}} = \frac{x}{y}$$

$$\Rightarrow \frac{A_4}{A_{4<n,m>}} - \frac{n^2 + m^2}{(n-m)^2} = \frac{m^6n^2(b-d)^4}{y} \geq 0$$

$$\Rightarrow \frac{A_4}{A_{4<n,m>}} \text{ 在 } b=d \text{ (平行四邊形) 時, 有最小值 } \frac{n^2+m^2}{(n-m)^2}$$

$$\frac{n(n^2+m^2-mn)}{(n-m)^3} - \frac{A_4}{A_{4<n,m>}} = \frac{m^3(n^2+m^2)^2bd[mnb^2+(n-m)^2bd+mnd^2]}{(n-m)y} > 0$$

$$\Rightarrow \lim_{b \rightarrow 0} \frac{A_4}{A_{4<n,m>}} = \lim_{d \rightarrow 0} \frac{A_4}{A_{4<n,m>}} = \frac{n(n^2+m^2-mn)}{(n-m)^3}$$

$$\Rightarrow \frac{n^2+m^2}{(n-m)^2} \leq \frac{A_4}{A_{4<n,m>}} < \frac{n(n^2+m^2-mn)}{(n-m)^3}$$

定理六： 對任意四邊形（如圖（七））。

$$S_{EFGH} = \Delta AIE + \Delta CKG + \Delta BKF + \Delta DLH + \frac{n-2m}{n} S_{ABCD}$$

定理七： 任意梯形（如圖（七））。

$$\text{若 } x = m^3n^3(n^2+m^2-mn)b^4 + mn(n^3-mn^2+m^2n+m^3)(n^3+mn^2-m^2n+m^3) \times$$

$$b^3d + (n^8 - 2mn^7 + 4m^2n^6 + 4m^6n^2 - 2m^7m + m^8)b^2d^2 + mn(n^3 - mn^2 + m^2n + m^3) \times$$

$$(n^3 + mn^2 - m^2n + m^3)bd^3 + m^3n^3(n^2 + m^2 - mn)d^4 > 0$$

$$y = m^3n^2(n-m)^3b^4 + mn(n-m)^2(n^4 - 2m^2n^2 + 4m^3n + m^4)b^3d + (n-m)^3 \times$$

$$(n^5 - mn^4 + 2m^2n^3 + 4m^3n^2 + m^4n - m^5)b^2d^2 + mn(n-m)^2(n^4 - 2m^2n^2 + 4m^3n$$

$$+ m^4)bd^3 + m^3n^2(n-m)^3d^4$$

$$\text{則 } \frac{n^2+m^2}{(n-m)^2} \leq \frac{A_4}{A_{4<n,m>}} = \frac{x}{y} < \frac{n(n^2+m^2-mn)}{(n-m)^3}$$

即 $\frac{A_4}{A_{4<n,m>}}$ 在 $b=d$ (平行四邊形) 時, 有最小值 $\frac{n^2+m^2}{(n-m)^2}$

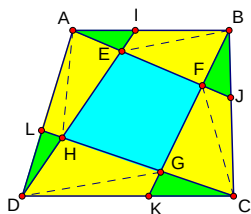
$$\lim_{b \rightarrow 0} \frac{A_4}{A_{4<n,m>}} = \lim_{d \rightarrow 0} \frac{A_4}{A_{4<n,m>}} = \frac{n(n^2+m^2-mn)}{(n-m)^3}$$

接著探討梯形第 $<n, m>$ 組同向切割線所截出來的線段比例

研究(六): 任意梯形第 $<n, m>$ 組同向切割線(如圖(八))。試求: 同向切

割線所截出來的線段比例(即求 $\overline{BF}:\overline{FG}:\overline{GK}$ 、 $\overline{CG}:\overline{GH}:\overline{HL}$ 、

$\overline{DH}:\overline{HE}:\overline{EI}$ 、 $\overline{AE}:\overline{EF}:\overline{FJ}$)



圖(八)

1. 求 $\overline{BF}:\overline{FG}:\overline{GK}$ 、 $\overline{DH}:\overline{HE}:\overline{EI}$

$$\Delta BJF = \frac{m^3nb dh}{2n^2b+2m^2d} \text{、} \Delta CKG = \frac{m^3nhd^2}{2(m^2+n^2-mn)d+2mn b} \text{、}$$

$$\Delta BCK = \frac{mnhd}{2} \text{ , 連 } \overline{CF}$$

$$\Rightarrow \Delta BCF = \frac{m^3nb dh}{2n^2b+2m^2d} \times \frac{n}{m} = \frac{m^2n^2bdh}{2n^2b+2m^2d}$$

$$\Delta CKF = \Delta BCK - \Delta BCF = \frac{mnhd}{2} - \frac{m^2n^2bdh}{2n^2b+2m^2d} = \frac{mnhd \left[n(n-m)b + m^2d \right]}{2n^2b+2m^2d}$$

$$\Rightarrow \frac{\overline{BF}}{\overline{KF}} = \frac{\Delta BCF}{\Delta CKF} = \frac{\frac{m^2 n^2 b d h}{2n^2 b + 2m^2 d}}{m n h d \left[\frac{n(n-m)b + m^2 d}{2n^2 b + 2m^2 d} \right]} = \frac{m n b}{n(n-m)b + m^2 d}$$

$$\begin{aligned} \frac{\overline{BF}}{\overline{KG}} &= \frac{\Delta BCF}{\Delta CKG} = \frac{\frac{m^2 n^2 b d h}{2n^2 b + 2m^2 d}}{\frac{m^3 n h d^2}{2(m^2 + n^2 - mn)d + 2mn b}} = \frac{m n^2 b^2 + n(n^2 + m^2 - mn)bd}{m^3 d^2 + m n^2 b d} \\ \Rightarrow \frac{\overline{BF}}{\overline{FG}} &= \frac{\overline{BF}}{\overline{KF} - \overline{KG}} = \frac{m^2 n^2 b^2 + m n(n^2 + m^2 - mn)bd}{m n^2(n-m)b^2 + n^2(n-m)^2 bd + m^2 n(n-m)d^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \overline{BF} : \overline{FG} : \overline{GK} &= \left[m^2 n^2 b^2 + m n(n^2 + m^2 - mn)bd \right] : \left[m n^2(n-m)b^2 + n^2(n-m)^2 bd \right. \\ &\quad \left. + m^2 n(n-m)d^2 \right] : \left[m^4 d^2 + m^2 n^2 b d \right] \quad \text{同理} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overline{DH} : \overline{HE} : \overline{EI} &= \left[m^2 n^2 d^2 + m n(n^2 + m^2 - mn)bd \right] : \left[m^2 n(n-m)b^2 + n^2(n-m)^2 bd \right. \\ &\quad \left. + m n^2(n-m)d^2 \right] : \left[m^4 b^2 + m^2 n^2 b d \right] \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ 只要 b 、 d 比例恆為定值， $\overline{BF} : \overline{FG} : \overline{GK}$ 、 $\overline{DH} : \overline{HE} : \overline{EI}$ 比例恆為定值

2. 求 $\overline{CG} : \overline{GH} : \overline{HL}$ 、 $\overline{AE} : \overline{EF} : \overline{FJ}$

$$\Delta CKG = \frac{m^3 n h d^2}{2(m^2 + n^2 - mn)d + 2mn b} \quad , \quad \Delta DLH = \frac{m^3 n b d h}{2n^2 d + 2m^2 b} \quad ,$$

$$\Delta DCL = \frac{m n h d}{2}$$

$$\Rightarrow \Delta DLG = \Delta DCL - \Delta DCG = \frac{m n h d}{2} - \frac{m^3 n h d^2}{2(m^2 + n^2 - mn)d + 2mn b} \times \frac{n}{m}$$

$$= \frac{m n d h \left[(n-m)^2 d + m n b \right]}{2(m^2 + n^2 - mn)d + 2mn b}$$

$$\begin{aligned}
& \Rightarrow \frac{\overline{CG}}{\overline{GL}} = \frac{\Delta DCG}{\Delta DGL} = \frac{\frac{m^2 n^2 h d^2}{2(m^2 + n^2 - mn)d + 2mn b}}{\frac{mndh[(n-m)^2 d + mn b]}{2(m^2 + n^2 - mn)d + 2mn b}} = \frac{mnd}{(n-m)^2 d + mn} \\
& \Rightarrow \\
& \frac{\overline{CG}}{\overline{HL}} = \frac{\Delta DCG}{\Delta DHL} = \frac{\frac{m^2 n^2 h d^2}{2(m^2 + n^2 - mn)d + 2mn b}}{\frac{m^3 n b d h}{2n^2 d + 2m^2 b}} = \frac{nd(n^2 d + m^2 b)}{m^2 n b^2 + m(n^2 + m^2 - mn)bd} \\
& \Rightarrow \frac{\overline{CG}}{\overline{GH}} = \frac{\overline{CG}}{\overline{GL} - \overline{HL}} = \frac{mnd(n^2 d + m^2 b)}{n^2(n-m)^2 d^2 + mn(n+m)(n-m)bd} \\
& \Rightarrow \\
& \overline{CG} : \overline{GH} : \overline{HL} = [mn^3 d^2 + m^3 n b d] : [n^2(n-m)^2 d^2 + mn(n+m)(n-m)bd] \\
& \quad : [m^3 n b^2 + m^2(n^2 + m^2 - mn)bd] \quad \text{同理} \\
& \Rightarrow \overline{AE} : \overline{EF} : \overline{FJ} = [mn^3 b^2 + m^3 n b d] : [n^2(n-m)^2 b^2 + mn(n+m)(n-m)bd] \\
& \quad : [m^3 n d^2 + m^2(n^2 + m^2 - mn)bd]
\end{aligned}$$

3. 當該四邊形為平行四邊形時：

即 $b = d$

$$\begin{aligned}
& \Rightarrow \\
& \overline{BF} : \overline{FG} : \overline{GK} = \overline{DH} : \overline{HE} : \overline{EI} = [m^2 n^2 b^2 + mn(n^2 + m^2 - mn)b^2] : [mn^2(n-m)b^2 \\
& \quad + n^2(n-m)^2 b^2 + m^2 n(n-m)b^2] : [m^4 b^2 + m^2 n^2 b^2] \\
& = [mn(m^2 + n^2)b^2] + [n(n-m)(m^2 + n^2)b^2] : [m^2(m^2 + n^2)b^2] \\
& = mn : n(n-m) : m^2 \\
& \overline{CG} : \overline{GH} : \overline{HL} = \overline{AE} : \overline{EF} : \overline{FJ} = [mn^3 d^2 + m^3 n b^2] : [n^2(n-m)^2 b^2 \\
& \quad + mn(n+m)(n-m)b^2] : [m^3 n b^2 + m^2(n^2 + m^2 - mn)b^2] \\
& = [mn(m^2 + n^2)b^2] : [n(n-m)(m^2 + n^2)b^2] : [m^2(m^2 + n^2)b^2]
\end{aligned}$$

$$= mn : n(n-m) : m^2 = \overline{BF} : \overline{FG} : \overline{GK} = \overline{DH} : \overline{HE} : \overline{EI}$$

$$\text{故 } \overline{BF} : \overline{FG} : \overline{GK} = \overline{DH} : \overline{HE} : \overline{EI} = \overline{CG} : \overline{GH} : \overline{HL} = \overline{AE} : \overline{EF} : \overline{FJ}$$

$$= mn : n(n-m) : m^2$$

定理八：任意梯形第 $\langle n, m \rangle$ 組同向切割線（如圖（八）），其同向切割線所截出來的線段比例為：

$$\left\{ \begin{array}{l} \overline{BF} : \overline{FG} : \overline{GK} = [m^2 n^2 b^2 + mn(n^2 + m^2 - mn)bd] : [mn^2(n-m)b^2 + n^2(n-m)^2 bd + m^2 n(n-m)d^2] : [m^4 d^2 + m^2 n^2 bd] \\ \overline{DH} : \overline{HE} : \overline{EI} = [m^2 n^2 d^2 + mn(n^2 + m^2 - mn)bd] : [m^2 n(n-m)b^2 + n^2(n-m)^2 bd + mn^2(n-m)d^2] : [m^4 b^2 + m^2 n^2 bd] \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \overline{CG} : \overline{GH} : \overline{HL} = [mn^3 d^2 + m^3 nbd] : [n^2(n-m)^2 d^2 + mn(n+m)(n-m)bd] : [m^3 nb^2 + m^2(n^2 + m^2 - mn)bd] \\ \overline{AE} : \overline{EF} : \overline{FJ} = [mn^3 b^2 + m^3 nbd] : [n^2(n-m)^2 b^2 + mn(n+m)(n-m)bd] : [m^3 nd^2 + m^2(n^2 + m^2 - mn)bd] \end{array} \right.$$

而且當 b 、 d 比例恆為定值時， $\overline{BF} : \overline{FG} : \overline{GK}$ 、 $\overline{DH} : \overline{HE} : \overline{EI}$ 、 $\overline{CG} : \overline{GH} : \overline{HL}$ 、 $\overline{AE} : \overline{EF} : \overline{FJ}$ 之比例亦恆為定值。

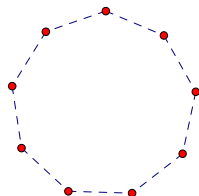
當 $b = d$ 時(亦即該四邊形為平行四邊形) $\Rightarrow$

$$\overline{BF} : \overline{FG} : \overline{GK} = \overline{DH} : \overline{HE} : \overline{EI} = \overline{CG} : \overline{GH} : \overline{HL} = \overline{AE} : \overline{EF} : \overline{FJ}$$

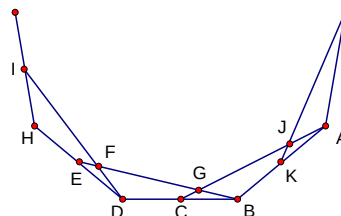
$$= mn : n(n-m) : m^2$$

四、探討正 r 邊形同向切割線之幾何性質：

研究（七）：任意正 r 邊形（如圖（九））。試求： $\frac{A_r}{A_{r<n,m>}}$



圖(九)



圖(十)

將研究（七）分成以下幾點討論：

（一）第 $\langle 2,1 \rangle$ 組同向切割線：

1. 從正 r 邊形之任意五邊討論（如圖（十））

在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle BDE$ 中

$$\because \overline{AB} = \overline{BD} \text{、} \overline{DE} = \overline{BC} = \frac{1}{2} \overline{BD} \text{、} \angle EDB = \angle ABC = \frac{(r-2)180^\circ}{r}$$

$$\therefore \triangle ABC \cong \triangle BDE (SAS)$$

$$\Rightarrow \text{同理 } \triangle BDE \cong \triangle DHI \text{，} \angle ACB = \angle BED$$

在 $\triangle CGB$ 和 $\triangle BDE$ 中

$$\because \angle GCB = \angle DEB \text{、} \angle GBC \text{ 共角}$$

$$\therefore \triangle CGB \sim \triangle BDE (AA)$$

$$\Rightarrow \angle CGB = \angle EDB = \frac{(r-2)180^\circ}{r}$$

在 $\triangle CGB$ 和 $\triangle EFD$ 中

$$\because \angle EBD = \angle IDH \text{、} \angle BED = \angle ACB \text{、} \overline{DE} = \overline{BC}$$

$$\therefore \triangle CGB \cong \triangle EFD (SAS) \text{ 同理 } \triangle CGB \cong \triangle KJA$$

$$\Rightarrow \overline{BG} = \overline{AJ} \text{ 、 } \overline{CG} = \overline{EF}$$

$$\Rightarrow \overline{FG} = \overline{BE} - (\overline{BG} + \overline{EF}) = \overline{AC} - (\overline{AJ} + \overline{CG}) = \overline{GJ} \text{ 又}$$

$$\angle FGJ = \frac{(r-2)180^\circ}{r}$$

故分割線所切割出來的 r 邊形為正 r 邊形

$$2. \because \triangle CGB \cong \triangle EFD \therefore \overline{CG} + \overline{BG} = \overline{EF} + \overline{BG}$$

$$\text{令 } \overline{BD} = x \text{ 、 } \overline{ED} = \frac{1}{2}x \text{ 由餘弦定理可知}$$

$$\Rightarrow \overline{BE} = \sqrt{\overline{BD}^2 + \overline{ED}^2 - 2\overline{BD}\overline{ED}\cos(\angle EDB)}$$

$$= \sqrt{x^2 + \frac{1}{4}x^2 - x^2\cos(\frac{(r-2)180^\circ}{r})}$$

$$= x\sqrt{\frac{5}{4} + \cos(\frac{360^\circ}{r})}$$

$$\Rightarrow \overline{EF} + \overline{BG} = \overline{CG} + \overline{BG} = \frac{\overline{BC}}{\overline{BE}} \times (\overline{BD} + \overline{DE})$$

$$= \frac{\frac{1}{2}x}{x\sqrt{\frac{5}{4} + \cos(\frac{360^\circ}{r})}} \times \frac{3}{2}x = \frac{3x}{4\sqrt{\frac{5}{4} + \cos(\frac{360^\circ}{r})}}$$

$$\Rightarrow \overline{FG} = \overline{BE} - (\overline{EF} + \overline{BG})$$

$$= x\sqrt{\frac{5}{4} + \cos(\frac{360^\circ}{r})} - \frac{3x}{4\sqrt{\frac{5}{4} + \cos(\frac{360^\circ}{r})}} = x \left[\frac{1 + 2\cos(\frac{360^\circ}{r})}{2\sqrt{\frac{5}{4} + \cos(\frac{360^\circ}{r})}} \right]$$

$$\Rightarrow \frac{A_r}{A_{r<n,m>}} = \frac{\overline{BD}^2}{\overline{FG}^2} = x^2 \cdot \frac{5 + 4\cos(\frac{360^\circ}{r})}{x^2 \cdot \left[2\cos(\frac{360^\circ}{r}) + 1\right]^2} = \frac{5 + 4\cos(\frac{360^\circ}{r})}{\left[2\cos(\frac{360^\circ}{r}) + 1\right]^2}$$

$$\text{設 } k = \cos(\frac{360^\circ}{r})$$

$$\Rightarrow \frac{A_r}{A_{r<n,m>}} = f(k) = \frac{4k+5}{(2k+1)^2} \{k \mid 0 \leq k \leq 1\} \text{ 為一遞減函數 (詳情請見附錄一)}$$

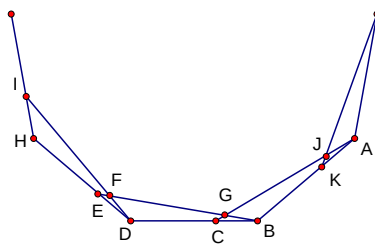
$$\Rightarrow f(k) \text{ 在 } k = \cos(\frac{360^\circ}{r}) = 0 \text{ 時, 有最大值 } 5; \text{ 在 } k = \cos(\frac{360^\circ}{r}) = 1 \text{ 時有最小值}$$

1

$$\Rightarrow \text{正 } r \text{ 邊形第 } \langle 2, 1 \rangle \text{ 組同向切割線} \begin{cases} r = 4 \Rightarrow \frac{A_r}{A_{r<n,m>(\max)}} = 5 \\ r \rightarrow \infty \Rightarrow \frac{A_r}{A_{r<n,m>(\min)}} = 1 \end{cases}$$

接著將第 $\langle 2, 1 \rangle$ 組同向切割線推廣至第 $\langle n, m \rangle$ 組同向切割線。

(三) 第 $\langle n, m \rangle$ 組同向切割線：



圖(十一)

1. 從正 r 邊形之任意五邊討論 (如圖 (十一))

由 (一) 可知分割線所切割出來的 r 邊形為正 r 邊形、

$$\overline{EF} + \overline{BG} = \frac{\overline{BC}}{\overline{BE}} \times (\overline{BD} + \overline{DE})。 \text{ 令 } \overline{BD} = x、\overline{ED} = \frac{mx}{n} \text{ 由餘弦定理可知}$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \overline{BE} = \sqrt{\overline{BD}^2 + \overline{ED}^2 - 2\overline{BD}\overline{ED}\cos(\angle EDB)} \\
&= \sqrt{x^2 + \frac{m^2 x^2}{n^2} + 2x \cdot \frac{mx}{n} \cos(\frac{360^\circ}{r})} = x\sqrt{\frac{m^2 + n^2}{n^2} + \frac{2m}{n} \cos(\frac{360^\circ}{r})} \\
&\Rightarrow \overline{EF} + \overline{BG} = \frac{\overline{BC}}{\overline{BE}} \times (\overline{BD} + \overline{DE}) \\
&= \frac{\frac{mx}{n}}{x\sqrt{\frac{m^2 + n^2}{n^2} + \frac{2m}{n} \cos(\frac{360^\circ}{r})}} \times \frac{(m+n)x}{n} = \frac{mx(m+n)}{n^2\sqrt{\frac{m^2 + n^2}{n^2} + \frac{2m}{n} \cos(\frac{360^\circ}{r})}} \\
&\Rightarrow \overline{FG} = \overline{BE} - (\overline{EF} + \overline{BG}) \\
&= x\sqrt{\frac{m^2 + n^2}{n^2} + \frac{2m}{n} \cos(\frac{360^\circ}{r})} - \frac{mx(m+n)}{n^2\sqrt{\frac{m^2 + n^2}{n^2} + \frac{2m}{n} \cos(\frac{360^\circ}{r})}} \\
&= x \left[\frac{n^2 - mn + 2mn \cos(\frac{360^\circ}{r})}{n^2\sqrt{\frac{m^2 + n^2}{n^2} + \frac{2m}{n} \cos(\frac{360^\circ}{r})}} \right] \\
&\Rightarrow \frac{A_r}{A_{r<2,1>}} = \frac{\overline{BD}^2}{\overline{FG}^2} = x^2 \left\{ \frac{n^2(n^2 + m^2) + 2n^3 m \cos(\frac{360^\circ}{r})}{x^2 \left[n^2 - mn + 2mn \cos(\frac{360^\circ}{r}) \right]^2} \right\} \\
&= \frac{n^4 + n^2 m^2 + 2n^3 m \cos(\frac{360^\circ}{r})}{\left[n^2 - mn + 2mn \cos(\frac{360^\circ}{r}) \right]^2} \\
&\text{設 } k = \cos(\frac{360^\circ}{r}) \\
&\Rightarrow \frac{A_r}{A_{r<2,1>}} = f(k) = \frac{(n^4 + n^2 m^2) + 2n^3 mk}{\left[n^2 - mn + 2mnk \right]^2} \{k \mid 0 \leq k \leq 1\} \text{ 為一遞減函數}
\end{aligned}$$

(詳情請見附件三)

$$\Rightarrow f(k) \text{ 在 } k = \cos\left(\frac{360^\circ}{r}\right) = 0 \text{ 時，有最大值 } \frac{n^4 + n^2 m^2}{(n^2 - mn)^2} = \frac{n^2 + m^2}{(n - m)^2} ;$$

$$\text{在 } k = \cos\left(\frac{360^\circ}{r}\right) = 1 \text{ 時有最小值 } = \frac{n^4 + 2n^3 m + n^2 m^2}{(n^2 + mn)^2} = 1$$

$\Rightarrow$ 正 r 邊形第 $\langle n, m \rangle$ 組同向切割線

$$\begin{cases} r = 4 \Rightarrow \frac{A_r}{A_{r \langle n, m \rangle (\max)}} = \frac{n^2 + m^2}{(n - m)^2} \\ r \rightarrow \infty \Rightarrow \frac{A_r}{A_{r \langle n, m \rangle (\min)}} = 1 \end{cases}$$

定理九：任意正 r 邊形，其第 $\langle n, m \rangle$ 組同向切割線。

$$\frac{A_r}{A_{r \langle n, m \rangle}} = \frac{n^4 + n^2 m^2 + 2n^3 m \cos\left(\frac{360^\circ}{r}\right)}{\left[n^2 - mn + 2mn \cos\left(\frac{360^\circ}{r}\right)\right]^2}$$

$$\text{且 } \begin{cases} r = 4 \Rightarrow \frac{A_r}{A_{r \langle n, m \rangle (\max)}} = \frac{n^2 + m^2}{(n - m)^2} \\ r \rightarrow \infty \Rightarrow \frac{A_r}{A_{r \langle n, m \rangle (\min)}} = 1 \end{cases}$$

肆、相關研究的比較

在全國科展中，我們發現有三篇與同向切割線相關的研究，分別是 49 屆「巢狀切割對內部子圖的探討」、50 屆「旋切三角形—旋切比能說的秘密」、臺灣 2007 年國際科展「費曼三角形的推廣」。上述的三篇研究都只著重在三角形、平行四邊形，和正多邊形的面積比例，而本研究除了探究上述幾個主題，還探討了同向切割線的線段比例、任意梯形的 $\frac{A_4}{A_{4<n,m>}}$ （比其他三篇研究更逼近任一四邊形），幾種多邊形 $\frac{A_r}{A_{r<n,m>}}$ 的值區，並將幾種多邊形的 $\frac{A_r}{A_{r<n,m>}}$ 簡化（由於出發點、定義的不同，所以本研究推得的公式結果與前人的作品不盡相同）。

伍、結論

一、任意三角形，其原三角形面積 A_3 與第 $\langle n, m \rangle$ 組同向切割線所切割出來的

$$\text{三角形面積 } A_{3\langle n, m \rangle} \text{ 比值為定值，其定值為 } \frac{A_3}{A_{3\langle n, m \rangle}} = \frac{n^2 - mn + m^2}{(n - 2m)^2}。$$

二、任意梯形，令其中平行的兩邊為 b 和 d ，則原四邊形面積 A_4

與第 $\langle n, 1 \rangle$ 組同向切割線所切割出來的四邊形面積 $A_{4\langle n, 1 \rangle}$ 之比值為：

$$\left[\frac{n^3(n-1)^3b^4 + n^2(n-1)^2(n^4 - 2n^2 + 4n + 1)b^3d + n(n-1)^3(n^5 - n^4 + 2n^3 + 4n^2}{n^3(n^2 - n + 1)b^4 + (n^7 - n^5 + 4n^4 - n^3 + n)b^3d + (n^8 - 2n^7 + 4n^6 + 4n^2} \right. \\ \left. \frac{+ n - 1)b^2d^2 + n^2(n-1)^2(n^4 - 2n^2 + 4n + 1)bd^3 + n^3(n-1)^3d^4}{-2n + 1)b^2d^2 + (n^7 - n^5 + 4n^4 - n^3 + n)bd^3 + n^3(n^2 - n + 1)d^4} \right]$$

$$\text{當 } b = d \text{ 時(亦即該四邊形為平行四邊形)，} \frac{A_4}{A_{4\langle n, 1 \rangle}} = \frac{n^2 + 1}{(n - 1)^2}$$

三、任意梯形，令其中平行的兩邊為 b 和 d ，則原四邊形面積 A_4 與第 $\langle n, 1 \rangle$ 組

同向切割線所切割出來的四邊形面積 $A_{4\langle n, 1 \rangle}$ 之比值，其範圍為：

$$\frac{n^2 + 1}{(n - 1)^2} \leq \frac{A_4}{A_{4\langle n, 1 \rangle}} < \frac{n(n^2 - n + 1)}{(n - 1)^3}$$

$$\text{當 } b = d \text{ 時(亦即該四邊形為平行四邊形)，} \frac{A_4}{A_{4\langle n, 1 \rangle}} = \frac{n^2 + 1}{(n - 1)^2}$$

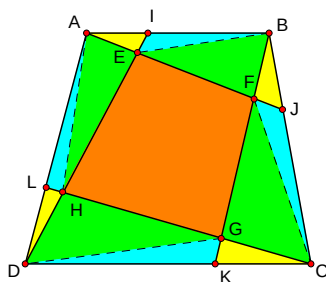
四、任意梯形第 $\langle n, 1 \rangle$ 組同向切割線（如下圖），其同向切割線所截

出來的線段比例為：

$$\left\{ \begin{array}{l} \overline{BF} : \overline{FG} : \overline{GK} = [n^2b^2 + n(n^2 - n + 1)bd] : [n^2(n-1)b^2 + n^2(n-1)^2bd + n(n-1)d^2] \\ : [d^2 + n^2bd] \\ \overline{DH} : \overline{HE} : \overline{EI} = [n^2d^2 + n(n^2 - n + 1)bd] : [n(n-1)b^2 + n^2(n-1)^2bd + n^2(n-1)d^2] \\ : [b^2 + n^2bd] \\ \overline{CG} : \overline{GH} : \overline{HL} = (n^3d^2 + nbd) : [n^2(n-1)^2d^2 + n(n-1)(n+1)bd] \\ : [nb^2 + (n^2 - n + 1)bd] \\ \overline{AE} : \overline{EF} : \overline{FJ} = (n^3d^2 + nbd) : [n^2(n-1)^2b^2 + n(n-1)(n+1)bd] \\ : [nd^2 + (n^2 - n + 1)bd] \end{array} \right.$$

而且當 b 、 d 比例恆為定值時， $\overline{BF} : \overline{FG} : \overline{GK}$ 、 $\overline{DH} : \overline{HE} : \overline{EI}$ 、
 $\overline{CG} : \overline{GH} : \overline{HL}$ 、

$\overline{AE} : \overline{EF} : \overline{FJ}$ 之比例亦恆為定值。



當 $b = d$ 時(亦即該四邊形為平行四邊形)

$$\overline{BF} : \overline{FG} : \overline{GK} = \overline{DH} : \overline{HE} : \overline{EI} = \overline{BF} : \overline{FG} : \overline{GK} = \overline{DH} : \overline{HE} : \overline{EI} = n : n(n-1) : 1$$

五、任意梯形，令其中平行的兩邊為 b 和 d ，則原四邊形面積 A_4

與第 $\langle n, m \rangle$ 組同向切割線所切割出來的四邊形面積 $A_{4\langle n, m \rangle}$ 之比值為：

$$\frac{A_4}{A_{4\langle n, m \rangle}} = \frac{x}{y} \quad \text{其中}$$

$$x = m^3n^3(n^2 + m^2 - mn)b^4 + mn(n^3 - mn^2 + m^2n + m^3)(n^3 + mn^2 - m^2n + m^3) \times$$

$$b^3d + (n^8 - 2mn^7 + 4m^2n^6 + 4m^6n^2 - 2m^7m + m^8)b^2d^2 + mn(n^3 - mn^2 + m^2n + m^3) \times$$

$$(n^3 + mn^2 - m^2n + m^3)bd^3 + m^3n^3(n^2 + m^2 - mn)d^4 > 0$$

$$y = m^3n^2(n-m)^3b^4 + mn(n-m)^2(n^4 - 2m^2n^2 + 4m^3n + m^4)b^3d + (n-m)^3 \times$$

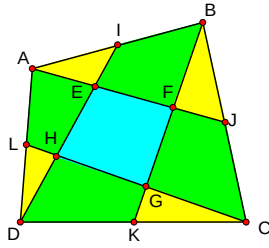
$$(n^5 - mn^4 + 2m^2n^3 + 4m^3n^2 + m^4n - m^5)b^2d^2 + mn(n-m)^2(n^4 - 2m^2n^2 + 4m^3n$$

$$+ m^4)bd^3 + m^3n^2(n-m)^3d^4$$

$$\text{且 } \frac{n^2 + m^2}{(n-m)^2} \leq \frac{A_4}{A_{4< n, m >}} = \frac{x}{y} < \frac{n(n^2 + m^2 - mn)}{(n-m)^3}$$

六、對任意四邊形（如下圖）。

$$A_{4< n, m >} = \Delta AIE + \Delta CKG + \Delta BKF + \Delta DLH + \frac{n-2m}{n} A_4$$



七、任意梯形第 $< n, m >$ 組同向切割線（如下圖），其同向切割線所截

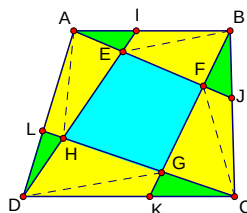
出來的線段比例為：

$$\begin{cases} \overline{BF} : \overline{FG} : \overline{GK} = [m^2n^2b^2 + mn(n^2 + m^2 - mn)bd] : [mn^2(n-m)b^2 + n^2(n-m)^2bd \\ + m^2n(n-m)d^2] : [m^4d^2 + m^2n^2bd] \\ \overline{DH} : \overline{HE} : \overline{EI} = [m^2n^2d^2 + mn(n^2 + m^2 - mn)bd] : [m^2n(n-m)b^2 + n^2(n-m)^2bd \\ + mn^2(n-m)d^2] : [m^4b^2 + m^2n^2bd] \end{cases}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \overline{CG} : \overline{GH} : \overline{HL} = \left[mn^3 d^2 + m^3 nbd \right] : \left[n^2(n-m)^2 d^2 + mn(n+m)(n-m)bd \right] \\ : \left[m^3 nb^2 + m^2(n^2 + m^2 - mn)bd \right] \\ \overline{AE} : \overline{EF} : \overline{FJ} = \left[mn^3 b^2 + m^3 nbd \right] : \left[n^2(n-m)^2 b^2 + mn(n+m)(n-m)bd \right] \\ : \left[m^3 nd^2 + m^2(n^2 + m^2 - mn)bd \right] \end{array} \right.$$

當 $b = d$ 時(亦即該四邊形為平行四邊形)

$$\begin{aligned} \overline{BF} : \overline{FG} : \overline{GK} &= \overline{DH} : \overline{HE} : \overline{EI} = \overline{BF} : \overline{FG} : \overline{GK} = \overline{DH} : \overline{HE} : \overline{EI} \\ &= mn : n(n-m) : m^2 \end{aligned}$$



八、任意正 r 邊形，其第 $\langle n, m \rangle$ 組同向切割線。

$$\frac{A_r}{A_{r \langle n, m \rangle}} = \frac{n^4 + n^2 m^2 + 2n^3 m \cos(\frac{360^\circ}{r})}{\left[n^2 - mn + 2mn \cos(\frac{360^\circ}{r}) \right]^2} \left\{ \begin{array}{l} r = 4 \Rightarrow \frac{A_r}{A_{r \langle n, m \rangle (\max)}} = \frac{n^2 + m^2}{(n-m)^2} \\ r \rightarrow \infty \Rightarrow \frac{A_r}{A_{r \langle n, m \rangle (\min)}} = 1 \end{array} \right.$$

陸、參考資料

[1] Proofs without words II : more exercises in visual thinking /

出版社 Washington、DC : Mathematical Association of America, c2000.

[2] 施承佑/巢狀切割對內部子圖的探討/ 49 屆全國中小學科學展覽

[3] 洪宜琦、郭建君、黃柏皓、黃楚瑜/ 旋切三角形—旋切比能說的秘密/ 50 屆
全國中小學科學展覽

[4] 江羽凡、蔡幸倍/ 費曼三角形的推廣/ 臺灣 2007 年國際科展

[5] 朱建正等/ 國民中學數學第四冊/ 翰林

附錄

附錄一：第 $\langle 2,1 \rangle$ 組同向切割線

令 $f(k) = \frac{4k+5}{(2k+1)^2}$ $\{k | 0 \leq k \leq 1\}$ 有兩數 t 、 r ，且 $t < r$

$$\begin{aligned} \Rightarrow f(t) - f(r) &= \frac{4t+5}{(2t+1)^2} - \frac{4r+5}{(2r+1)^2} \\ &= \frac{(4t+5)(2r+1)^2 - (4r+5)(2t+1)^2}{(2t+1)^2(2r+1)^2} \\ &= \frac{(r-t)(16rt+20r+20t+16)}{(2t+1)^2(2r+1)^2} > 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow f(t) > f(r)$$

$$\Rightarrow f(k) = \frac{4k+5}{(2k+1)^2} \quad \{k | 0 \leq k \leq 1\} \text{ 為一遞減函數}$$

附錄二：第 $\langle 3,1 \rangle$ 組同向切割線

令 $f(k) = \frac{3k+5}{2(k+1)^2}$ $\{k | 0 \leq k \leq 1\}$ 有兩數 t 、 r ，且 $t < r$

$$\begin{aligned} \Rightarrow f(t) - f(r) &= \frac{3t+5}{2(t+1)^2} - \frac{3r+5}{2(r+1)^2} \\ &= \frac{2(r+1)^2(3t+5) - 2(t+1)^2(3r+5)}{4(t+1)^2(r+1)^2} \\ &= \frac{(r-t)(3rt+5r+5t+7)}{2(t+1)^2(r+1)^2} > 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow f(t) > f(r)$$

$$\Rightarrow f(k) = \frac{3k+5}{2(k+1)^2} \quad \{k | 0 \leq k \leq 1\} \text{ 為一遞減函數}$$

附錄三：第 $\langle n, m \rangle$ 組同向切割線

證 $f(k) = \frac{(n^4 + n^2 m^2) + 2n^3 m k}{[n^2 - mn + 2mnk]^2} \{k \mid 0 \leq k \leq 1\}$ 之方法與附錄一、附錄二相同。

評語

作者將最簡單的三角形同向分割面積比值問題，推廣至任意三角形同向分割的面積比值問題，並且得到確切解。三角形的情形，得到完全解決。

對於任意四邊形，這是一個難題。對於梯形的情況，作者得到了比值，它與 n, m 及平行邊長有關，有趣的是當梯形是平行四邊形時，該比值是最小的，如果能證明它也是任意四邊形同向分割面積比值中最小的，會是有意義的工作。